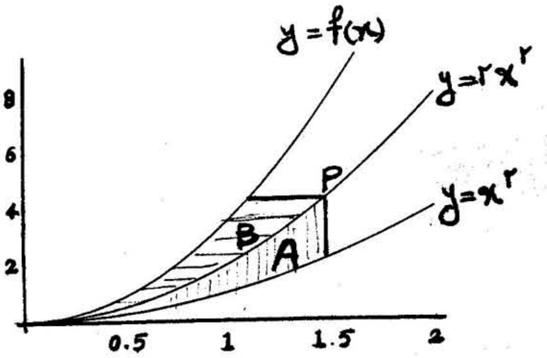
جلسه دوم ۸۳/۲/۲۳ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**



۱) فرض کنید در شکل روبرو تابع f یک‌به‌یک و پیوسته باشد و به ازای هر نقطهٔ P روی منحنی $y = 2x^2$، مساحت نواحی A و B با هم برابر باشند. ضابطه تابع f را مشخص کنید.

۲) فرض کنید $f : [a, b] \to (a, b)$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد مثبتی مانند α و $c \in (a, b)$ چنان موجودند که

$$f(c) + f(c + \alpha) + \cdots + f(c + n\alpha) = (n + 1)(c + \frac{n}{2}\alpha)$$

۳) ماتریس O را متعامد می‌نامیم هرگاه $OO^t = O^tO = I$. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی متعامد با درآیه‌های در $\mathbb{C}$ باشند و $\det(A) + \det(B) = 0$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $\det(A + B) = 0$؟ چرا؟

۴) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد و عدد طبیعی n موجود باشد با این ویژگی که برای هر $k \in \{n, n + 1, n + 2\}$ و هر $x, y \in R$، $(xy)^k = x^ky^k$. ثابت کنید R جابه‌جایی است.

۵) از سه نفر که مظنون به قتل هستند، یکی قاتل است. قرار است آزمایشی روی این ۳ نفر انجام شود که شامل ۵ سوال است. اگر فرد تحت آزمایش بی‌گناه باشد احتمال اینکه در برابر هر سوال واکنش مثبت نشان دهد ۰/۴ است و اگر گناهکار باشد، احتمال اینکه واکنش مثبت نشان دهد ۰/۸ است. از این سه نفر یکی را به تصادف انتخاب کرده، او را تحت آزمایش قرار می‌دهیم. این فرد در برابر ۴ سوال واکنش مثبت و یک سوال واکنش منفی نشان می‌دهد. احتمال اینکه او قاتل باشد چقدر است؟

۶) فرض کنید X یک مجموعه و r عددی طبیعی باشد. X_r را مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های r عضوی X در نظر بگیرید. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از X_r باشد، با این ویژگی که اشتراک هر k عضو F ناتهی است ($k \geq 2$ عددی ثابت است). اگر قرار دهیم

$$I(F) = \min\{|T| : T \subseteq X;\ T \cap A \neq \phi, \forall A \in F\},$$

ثابت کنید $I(F) \leq \frac{r-1}{k-1} + 1$.

موفق باشید.