جلسه اول ۸۳/۲/۲۲ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

۱) ثابت کنید هر تابع مختلط یک‌به‌یک و تام، به شکل $f(z) = az + b$ می‌باشد که در آن a و b اعداد مختلط ثابتی هستند و $a \neq ۰$.

۲) فرض کنید $d_۱$ و $d_۲$ به ترتیب متریک‌های اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^۲$ باشند، $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x = ۰$ یا $y = ۰\}$ و $d = d_۲|_A$ متریک القا شده از $\mathbb{R}^۲$ روی A باشد. ثابت کنید اگر $f : (\mathbb{R}, d_۱) \longrightarrow (A, d)$ پیوسته و پوشا باشد، آنگاه $f^{-۱}\{(۰,۰)\}$ حداقل سه عضو دارد.

۳) فرض کنید f یک تابع حسابی باشد با این ویژگی که برای هر عدد طبیعی n، $\sum_{d|n} f(d) = n^۲$ ($\sum_{d|n}$ یعنی مجموع روی مقسوم‌علیه‌های مثبت n). اگر ϕ تابع فی اویلر باشد ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n > ۱$،

$$\frac{f(n)}{\phi(n)} = n \prod_{\text{اول}\, p|n} (۱ + \frac{۱}{p}).$$

۴) فرض کنید G زیرگروهی از S_n باشد با این ویژگی که برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۱ \leq j \leq n$، عضو $\sigma \in G$ موجود باشد که $\sigma(i) = j$. ثابت کنید برای هر $۱ \leq k \leq n$، $G_k \cap Z(G) = \{e\}$ که در آن $G_k = \{\tau \in G : \tau(k) = k\}$، $Z(G)$ مرکز گروه G و e عضو همانی G است.

۵) فرض کنید A مجموعهٔ تمام بردارهای n مؤلفه‌ای با درآیه‌های صفر و یک باشد به طوری که تعداد درآیه‌های ۱ در هر بردار فرد است. بیشترین تعداد بردارهایی از مجموعهٔ A که دوبه‌دو تعداد زوج درآیهٔ ۱ مشترک دارند را با ذکر دلیل تعیین کنید.

۶) فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعهٔ n عضوی به طور جزئی مرتب (بازتابی، پادمتقارن و متعدی) باشد. برای هر عضو $i \in P$ قرار دهید $U_i = \{j : j \in P, j > i\}$ و $L_i = \{j : j \in P, j < i\}$. فرض کنید به هر عضو P مانند i عدد حقیقی X_i با شرط زیر نسبت داده شده باشد.

$$X_i = \begin{cases} \dfrac{۱ - \sum_{j \in L_i} X_j}{n - |U_i|} & L_i \neq \emptyset \text{ اگر} \\[2ex] \dfrac{۱}{n - |U_i|} & L_i = \emptyset \text{ اگر} \end{cases}$$

ثابت کنید برای هر $i \in P$ داریم $۰ \leq X_i \leq ۱$.

موفق باشید.