پاسخ سوالات جلسه دوم ۸۳/۲/۲۳

پاسخ سوال ۱) فرض کنید $g(y) = f^{-1}(y) = x$ و $P(x,y) = P(x, 2x^2)$ روی $y = 2x^2$ اختیار شده باشد. در این‌صورت

$$A = \int_0^x (2t^2 - t^2)dt = \frac{1}{3}x^3$$

$$B = \int_0^y (\sqrt{\frac{t}{2}} - g(t))dt = \frac{\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}} - \int_0^y g(t)dt$$

$$A = B \Rightarrow \int_0^y g(t)dt = (\frac{y}{2})^{\frac{3}{2}}$$

بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و با توجه به شکل می‌توان نسبت به y از رابطهٔ فوق مشتق گرفت (g پیوسته است). پس

$$g(y) = \frac{3}{4}(\frac{y}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{32}y \Rightarrow y = \frac{32}{9}x^2$$

□

پاسخ سوال ۲) فرض کنید $h(x) = f(x) - x$. در این‌صورت $h(a) > 0$ و $h(b) < 0$. چون h پیوسته است، $\delta > 0$ موجود است که برای هر $x \in (0, \delta)$، $h(x+a) > 0$ و $h(b-x) < 0$. فرض کنید $\alpha = \frac{\delta}{n+1}$ و

$$g(x) = [f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+n\alpha)] - [x + (x+\alpha) + \cdots + (x+n\alpha)].$$

در این‌صورت $g(a) > 0$ و $g(b) < 0$ و بنا به قضیه مقادیر میانی یک $c \in (a,b)$ موجود است که $g(c) = 0$. پس

$$\begin{aligned} f(c) + f(c+\alpha) + \cdots + f(c+n\alpha) &= c + (c+\alpha) + \cdots + (c+n\alpha) \\ &= nc + (1 + 2 + \cdots + n)\alpha \\ &= (n+1)c + \frac{(n+1)n}{2}\alpha \\ &= (n+1)(c + \frac{n}{2}\alpha) \end{aligned}$$

□

پاسخ سوال ۳) بله.

توجه می‌کنیم که $\det(A+B) = \det(A^t + B^t)$. پس

$$\begin{aligned} \det(A)\det(A+B) &= \det(A)\det(A^t+B^t) = \det(I + AB^t), \\ \det(B)\det(A+B) &= \det(B)\det(A^t+B^t) = \det(I + BA^t) = \det(I + AB^t). \end{aligned}$$

در نتیجه $\det(A)\det(A+B) = \det(B)\det(A+B)$ و لذا $(\det(A) - \det(B))\det(A+B) = 0$.

اگر $\det(A) - \det(B) = 0$، فرض نتیجه خواهد داد که $\det(A) = \det(B) = 0$ و این تناقض است زیرا در ماتریسهای متعامد دترمینان ± 1 است. پس $\det(A+B) = 0$. □

پاسخ سوال ۴) فرض کنید $x, y \in R$ دلخواه باشند. می‌توانیم بنویسیم

$$x^{n+۲}y^{n+۲} = (xy)^{n+۲} = (xy)^{n+۱}xy = x^{n+۱}y^{n+۱}xy,$$

در نتیجه

$$x^{n+۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

تساوی اخیر به ازای هر $x, y \in R$ برقرار است، پس با تبدیل x به $x + ۱$ نیز برقرار خواهد ماند. در این صورت به دست می‌آوریم

$$(۱ + x)^{n+۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰,$$

یا

$$\left(\binom{n+۱}{۰} + \binom{n+۱}{۱}x + \cdots + \binom{n+۱}{n+۱}x^{n+۱}\right)(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

با ضرب طرفین تساوی اخیر در x^n به دست می‌آوریم

$$x^n(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

تساوی اخیر نیز به ازای هر $x, y \in R$ برقرار است، پس مجدداً با تبدیل x به $x + ۱$ برقرار خواهد ماند. در این صورت اگر مانند بالا عمل کنیم به دست می‌آوریم

$$x^{n-۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

با ادامهٔ این فرآیند به دست می‌آید

$$(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰. \qquad (*)$$

اکنون با شروع از

$$x^{n+۱}y^{n+۱} = (xy)^{n+۱} = (xy)^n xy = x^n y^n xy$$

به دست می‌آوریم

$$(xy^n - y^n x)y = ۰.$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در y به دست می‌آوریم $yxy^{n+۱} - y^{n+۱}xy = ۰$ که با استفاده از $(*)$ به صورت $yxy^{n+۱} - xy^{n+۲} = ۰$ یا $(yx - xy)y^{n+۱} = ۰$ تبدیل می‌شود. در نهایت با تبدیل y به $y + ۱$ و انجام فرآیند بالا به دست می‌آید $yx - xy = ۰$، یا $yx = xy$. پس R جابه‌جایی است. □

پاسخ سوال ۵) فرض کنید یک نفر را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. پیشامدهای ذیل را تعریف می‌کنیم:

پیشامدA $:=$ شخص قاتل است $\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}$

پیشامدB $:=$ شخص بی‌گناه است $\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}$

پیشامد$+$ $:=$ شخص نسبت به سوال واکنش مثبت نشان دهد $\Rightarrow \begin{cases} P(+|A)=۰/۸ \\ P(+|B)=۰/۴ \end{cases}$

پیشامد$-$ $:=$ شخص نسبت به سوال واکنش منفی نشان دهد $\Rightarrow \begin{cases} P(-|A)=۰/۲ \\ P(-|B)=۰/٦ \end{cases}$

پیشامدE $:=$ شخص در برابر ۴ سوال واکنش مثبت و یک سوال واکنش منفی نشان دهد

واضح است که جواب مسئله $P(A|E)$ است.

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۸)^{۴}(۰/۲)}{\left(\frac{۱}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۸)^{۴}(۰/۲)\right)+\left(\frac{۲}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۴)^{۴}(۰/٦)\right)} = \frac{۸}{۱۱}. \quad \square \end{aligned}$$

پاسخ سوال ٦) برای $j=۱,\dots,k$، j مجموعه $A_۱$، ...، A_j را از F طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط زیر صدق کنند

$$۱ \le |A_۱\cap\cdots\cap A_j| \le r-(j-۱)(I(F)-۱) \qquad (*)$$

و برای $j=k$ حکم مسئله اثبات می‌شود.

با استقراء روی j رابطهٔ $(*)$ را ثابت می‌کنیم. اگر $j=۱$ آنگاه یک عضو F مانند $A_۱$ را به دلخواه انتخاب نمایید. فرض کنید $(*)$ برای j($j\le k-۱$) اثبات شده باشد و $A_۱$، ...، A_j مجموعه‌های از F باشند که در رابطهٔ $(*)$ صدق می‌کنند. طبق فرض مسئله $A_۱\cap\cdots\cap A_j$ با هر عضو F اشتراک ناتهی دارد بنابراین $|A_۱\cap\cdots\cap A_j|\ge I(F)$. یک زیرمجموعه مانند $S\subseteq A_۱\cap\cdots\cap A_j$ با $I(F)-۱$ عضو در نظر بگیرید. لذا $A_{j+۱}\in F$ وجود دارد که $S\cap A_{j+۱}=\phi$ بنابراین

$$\begin{aligned} ۱ &\le |A_۱\cap\cdots\cap A_j\cap A_{j+۱}| \le |A_۱\cap\cdots\cap A_j\cap \overline{S}| = |A_۱\cap\cdots\cap A_j - S| \\ &= |A_۱\cap\cdots\cap A_j| - (I(F)-۱) \le r-(j-۱)(I(F)-۱)-(I(F)-۱) \le \\ &\le r-j(I(F)-۱) \end{aligned}$$

لذا رابطهٔ $(*)$ و حکم مسئله نتیجه می‌شوند. $\square$