

سخنرانی میثم نصیری در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان ریودوژانیرو، برزیل، ۲۰۱۸

سیاوش شهشهانی*

زمان منفی، به یکی از این نقاط تناوبی میل می‌کند.

- اگر $\rho(f)$ ناگویا باشد، نقطه تناوبی وجود ندارد و یکی از دو حالت زیر حادث می‌شود: (الف) تابعی پیوسته h از دایره به خود آن وجود دارد که $hof = Roh$ ، و در اینجا R دوران دایره با عدد گردشی $\rho(f)$ است. در این حالت مدار هر نقطه در دایره چگال است. (ب) زیر مجموعه یکتایی از دایره، همسانریخت با مجموعه کانتور، وجود دارد که تحت f ناورداست و مدار هر نقطه، چه در زمان مثبت و چه در زمان منفی، به این مجموعه میل می‌کند.



در واقع دانترو^۲ نشان داد که برای وابریختی‌های مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته با تغییرات کراندار و عدد گردشی ناگویا، فقط حالت (الف) پدید می‌آید. بدین ترتیب در حالت یک‌بعدی نظام دینامیکی همسانریختی‌ها و وابریختی‌ها از رده‌بندی قاطع و ساده‌ای برخوردار است. این تصویر ساده در حالت دوبعدی دستخوش پیچیدگی و تنوع شگفت‌انگیزی می‌شود. در اینجا هم انواع جدیدی رفتار دینامیکی پدید می‌آید، و هم رفتارهای گوناگون ممکن است تماماً و در جوار همدیگر ظاهر شوند. بخشی از کار مورد بحث معطوف به حالتی است که ناحیه ساده-همبندی چون U در یک خمینه دوبعدی تحت همسانریختی ناورداست، یعنی هر نقطه U به نقطه‌ای از U نگاشته می‌شود. در اینجا ممکن این انتظار پیش آید که در مرز U (که نیز لزوماً ناوردا خواهد شد) ملاحظات یک‌بعدی بالا ظاهر شود و از آن بتوان در مورد دینامیک داخل U نتیجه‌گیری کرد. در حالتی که مرز U یک خم بسته ساده است، این انتظار بجاست، ولی مرز یک ناحیه ساده-همبند ممکن است بسیار پیچیده‌تر بوده



در نشست‌های کنگره بین‌المللی ریاضیدانان که چهارسال یک بار برگزار می‌شود علاوه بر حدود ۲۰ سخنرانی اصلی یک ساعتی، تعدادی سخنرانی ۴۵ دقیقه‌ای نیز به دعوت کنگره صورت می‌گیرد. در کنگره اخیر مرداد ۱۳۹۷، برای اولین بار از یک ریاضیدان مقیم ایران به این منظور دعوت به عمل آمد. دکتر میثم نصیری، عضو پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی و همکارش، اندرس کوروپکی^۱، سخنرانی‌ای زیر عنوان «دینامیک مرزی همسانریختی‌های رویه‌ای» در بخش سیستم‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل عادی ایراد کردند. موضوع پژوهش مورد بحث زمینه تاریخی دیرینه‌ای دارد و به کاری از آنری پوانکاره در اواخر قرن نوزدهم بازمی‌گردد. در نیم قرن اخیر کوشش‌های موفقی در بسط این زمینه صورت گرفته که کار نصیری، کوروپکی و همکارشان پاتریس لولالوز^۲ شاخص‌ترین این سلسله پیشرفت‌هاست. در زیر به توصیف کوتاهی از این کارها خواهیم پرداخت.

اگر $S \rightarrow S: f$ یک همسانریختی دایره واحد باشد، پوانکاره عددی حقیقی $\rho(f)$ به f نسبت داد (عدد گردشی) که در واقع میانگین گردش نقاط مختلف دایره به عنوان مضربی از 2π است. برای دو همسانریختی f و g از دایره، اگر تابعی پیوسته h از S به S وجود داشته باشد که $hog = foh$ ، آنگاه عدد گردشی f و g برابرند. قضیه زیر نشان می‌دهد که عدد گردشی رفتار دینامیکی f را کاملاً مشخص می‌کند:

- اگر $\rho(f)$ عددی گویا چون p/q (ساده شده) باشد، f دارای نقاط تناوبی است، همه این نقاط دارای کوچکترین دوره تناوب q هستند، و مدار هر نقطه دایره، چه در زمان مثبت و چه در

^۱Andres Koropecski ^۲Patrice le Calvez ^۳Denjoy

• اگر عدد گردشی گویا و برابر p/q باشد، هر نقطه ناسرگردان مرز، نقطه ثابتی برای f است و همه نقاط تناوبی کوتاهترین دوره برابر دارند. بالاخص اگر U کراندار باشد، حدهای آغازی و پایانی هر نقطه مرزی از نقاط ثابت f تشکیل شده است.

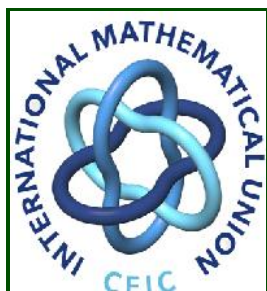
• اگر عدد گردشی ناگویا باشد، مرز فاقد نقطه تناوبی است.

قضایایی دیگر در مورد وابریختی‌های حافظ مساحت صفحه به شرح زیرند. اگر U یک قرص باز ناوردا تحت چنین وابریختی‌ای مانند f باشد که مرز آن شامل نقطه‌ای ثابت است، آنگاه:

• مشتق f در هر نقطه ثابت مرزی دارای مقادیر ویژه مثبت است، پس نقاط ثابت بیضوی در مرز وجود ندارند.

• اگر مقدار ۱ در میان مقادیر ویژه فوق ظاهر نشود، مرز U اجتماع متناهی نقاط زینی با اتصال‌های زینی بین آنهاست. بالاخص مرز U موضعاً همبند است.

• اگر K یک دایره مانای ناوردا باشد که شامل یک نقطه ثابت است، آنگاه تحدید f به K تابع همانی است.



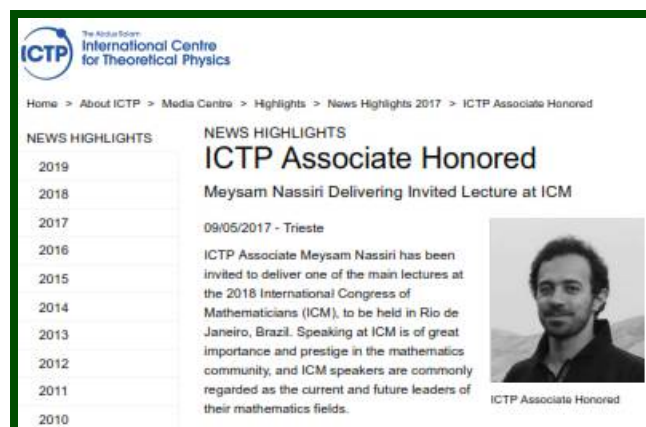
بخش دیگری از کار نصیری و همکاران به رفتارهای نوعی^۹ در سیستم‌های دینامیکی اختصاص دارد. اگر یک ویژگی برای زیرمجموعه‌ای باز و چگال از یک فضای توپولوژیک برقرار باشد، آن را تقریباً برقرار در سراسر فضا تلقی می‌کنیم. فضای توپولوژیک نوع بر^{۱۰} فضایی است که در آن هر اشتراک شما را از مجموعه‌های باز-چگال (یک مجموعه ته‌ماند یا residual)، در فضا چگال باشد. فضاهای متریک تمام نمونه‌های بارز اینگونه فضا هستند. ویژگی‌ای را نوعی می‌نامیم که برای دست‌کم یک زیرمجموعه ته‌ماند از فضای بر برقرار باشد. این حدس را می‌توان به پوانکاره منسوب کرد که چگال بودن نقاط تناوبی یک ویژگی نوعی در فضای C^r ، $r > 0$ وابریختی‌های هم‌تافته^{۱۱} یک رویه است. در حالت $r = 1$ ، این حدس توسط پیو^{۱۲} و رابینسن^{۱۳} به اثبات رسیده است ولی برای $r > 1$

و در عین حال از پایداری تحت تغییرات کوچک دستگاه برخوردار باشد. از انواع پیچیده مجموعه‌هایی که به صورت مرز ناحیه ساده-همبند ظاهر می‌شوند، می‌توان به مرز «دریاچه‌های وادا»^۴ که مرز مشترک سه یا بیشتر ناحیه ساده-همبند است و «دایره مانا»^۵، که مثلاً به عنوان مرز قرص زیگل^۶ در سیستم‌های دینامیکی مختلط ظاهر می‌شود، نام برد که همه‌جا موضعاً ناهمبند است. یک روش کلاسیک برخورد با این مرزها، فشردن مرز ناحیه ساده-همبند با افزودن مجموعه «پایانه‌های اولیه»^۷ است که نخستین بار کاراتودوری^۸ در آنالیز مختلط برای توسعه نگاشت ریمان به مرز ابداع کرد. نصیری و همکاران تعمیمی از این نظریه را با الهام از تحقیقات پیشین Mather به کار می‌گیرند و از عدد گردشی مجموعه افزوده شده همانند دایره استفاده می‌کنند. آنان با افزودن شرطی درباره رفتار دینامیکی در نزدیکی مرز که در مصادیق مورد نظرشان اغلب برقرار است موفق می‌شوند نتایج جالب توجهی کسب کنند. توصیف دقیق این شرط که آن را «شرط مرزی» می‌خوانند در این گزارش کوتاه عملی نیست ولی کافی است ذکر شود که این شرط در هر یک از وضعیت‌های زیر برقرار است:

• وقتی همه نقاط U تحت f ناسرگردان باشند، یعنی هر همسایگی نقطه ملاً به همان همسایگی بازگشت داشته باشد،

• بالاخص وقتی ناحیه U مساحت متناهی داشته و همسانریختی f حافظ مساحت باشد،

• دینامیکی که روی دایره پایانه‌ها القاء می‌شود ترا یا باشد، یعنی مدار چگال وجود داشته باشد.



بدین ترتیب چنانچه U زیرمجموعه باز و ساده-همبند ناوردایی تحت همسانریختی رویه‌ای شامل U باشد و شرط مرزی نیز برقرار باشد، قضیه زیر را به اثبات می‌رسانند:

⁴Wada Lakes ⁵Pseudo-circle ⁶Siegel Disk ⁷Prime Ends ⁸Carathéodory ⁹generic ¹⁰Baire ¹¹symplectic ¹²Pugh ¹³Robinson

او در کنگره ریودوژانیرو ارائه گردید.



میثم نصیری متولد آبادان در سال ۱۳۵۷ است. او مدرک‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی خود را به ترتیب از دانشگاه‌های صنعتی امیرکبیر و صنعتی شریف کسب کرد، از مؤسسه ایمپا (IMPA) در برزیل دکتری ریاضی گرفت و در حال حاضر عضو هیئت علمی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است. نصیری در سال ۱۳۹۶ موفق به کسب جایزه ابوریحان (فرهنگستان علوم)، جایزه ثبوتی-خواجه‌پور (مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان) و جایزه ویژه پژوهشگاه دانش‌های بنیادی شد. وی در سال‌های ۱۳۹۲ و ۱۳۹۶ در کنفرانس سالانه انجمن ریاضی ایران سخنران عمومی مدعو بود.

* دانشگاه صنعتی شریف

هنوز نتیجه قطعی حاصل نشده است. کار نصیری و همکارانش منجر به نتایج قابل توجهی در این زمینه و اثبات‌های ساده‌تر برای بعضی نتایج پیشین شده است. یک قضیه کلیدی آنان به این شرح است:

- ویژگی زیر برای وابریختی‌های هموارحافظ مساحت رویه‌های بسته در توپولوژی C^r نوعی است: اگر U زیرمجموعه‌ای باز و ناوردا تحت وابریختی باشد که تعداد پایانه‌های توپولوژیک آن متناهی است، آنگاه مرز U از تعدادی متناهی مجموعه فشرده و همبند غیرتناوبی و تعدادی متناهی نقطه منزوی تشکیل شده است.

به علاوه در اینجا شرایطی که منجر به نوعی بودن می‌شود به طور صریح و قابل تحقیق ارائه می‌گردد. از این قضیه می‌توان نتایج مهمی استخراج کرد، از جمله قضایای زیر که اولی (با اندک تفاوتی در فرض نوعی) قبلاً توسط Mather و دومی توسط Xia ثابت شده بودند:

- به‌طور C^r -نوعی برای وابریختی‌های حافظ مساحت رویه‌های بسته، بستر خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقاط زینی برهم منطبقند.
- به‌طور C^r -نوعی، برای وابریختی‌های حافظ مساحت رویه‌های بسته، نقاطی که مدارشان به‌گونه‌ای به مدار یک نقطه تناوبی مجانب می‌شود در رویه چگال هستند.

شرحی از نتایج بالا و دستاوردهای مشابه دیگر توسط نصیری و همکار