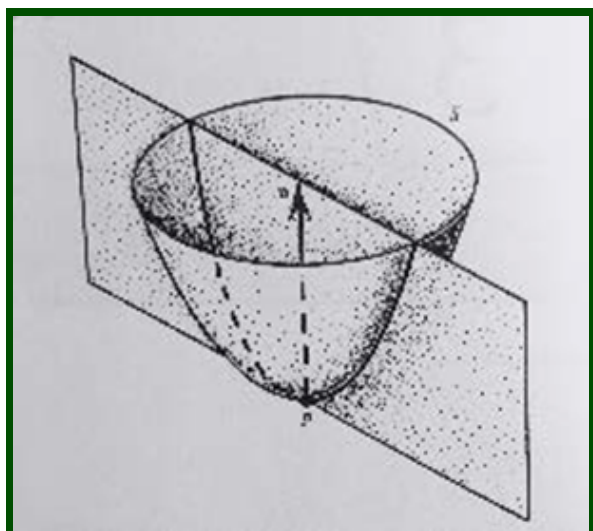


انحنای گاوسی چیست؟

برگردان: محمدباقر کاظمی*، ویراستار: حسن حقیقی**



شکل ۱: برای تعریف انحنای گاوسی، به انحنای خم‌های برش توجه کنید. انحنای گاوسی حاصل ضرب بزرگترین (مثبت‌ترین) و کوچکترین (منفی‌ترین) آن انحناهاست.

تعریف. فرض کنیم می‌دانید چگونه انحنای یک خم را تعریف نمایید، حال انحنای یک رویه در نقطه‌ای مانند p را چگونه تعریف می‌کنید؟ مانند شکل ۱، رویه را با یک صفحه عمود بر آن در نقطه p برش دهید. انحنای خمی که از برش رویه توسط صفحه حاصل شده است را به دست آورید. بنابراین انحناهایی در جهت‌های مختلف خواهید داشت. بزرگترین و کوچکترین انحناهایی که به این ترتیب به دست می‌آید انحناهای اصلی نامیده می‌شود و در جهت‌های عمود بر هم واقع هستند. میانگین این دو عدد انحنای میانگین و حاصلضرب آنها انحنای گاوسی نامیده می‌شود.

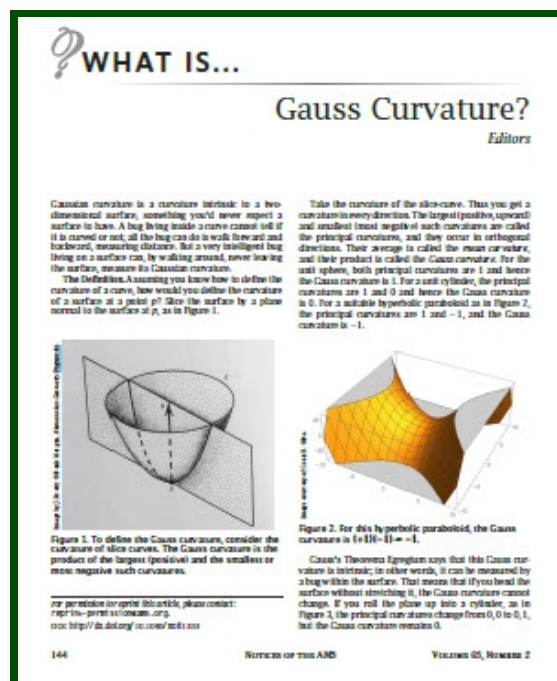
برای کره واحد، هر دو انحنای اصلی برابر ۱ است بنابراین انحنای گاوسی آن نیز ۱ می‌شود. در استوانه‌ای با شعاع واحد، انحناهای اصلی برابر ۱ و صفر هستند و در نتیجه انحنای گاوسی صفر است. در یک سهمی‌وار هذلولوی مناسب مانند شکل ۲، انحناهای اصلی برابر ۱ و ۱- و انحنای گاوسی ۱- می‌باشد.

قضیه اساسی گاوس بیان می‌کند که این انحنای گاوسی کمیتی ذاتی است؛ به بیان دیگر، این عدد توسط حشره‌ای که درون رویه زندگی می‌کند قابل اندازه‌گیری است. این بدان معناست که اگر شما رویه را بدون آن که کش بیاید خم نمایید، انحنای گاوسی آن تغییری

این متن ترجمه‌ای از مقاله زیر است:

What is Gauss curvature? Editors, Notices of the AMS, Vol. 63(2), 2016.

<https://www.ams.org/publications/journals/notices/201602/rnoti-p144.pdf>



انحنای گاوسی یک انحنای ذاتی رویه‌ای دو بعدی است، چیزی که ممکن است شما هرگز انتظار نداشته باشید یک رویه آن را داشته باشد. وقتی حشره‌ای درون یک خم زندگی می‌کند نمی‌تواند بگوید که آیا خمیده است یا نه؛ آن چه این حشره می‌تواند انجام دهد این است که با حرکت به سمت جلو و عقب، فاصله و طول را اندازه‌گیری نماید. اما یک حشره هوشمند! که بر روی یک رویه زندگی می‌کند با حرکت کردن به اطراف رویه بدون این که از آن خارج شود، می‌تواند انحنای گاوسی آن را اندازه‌گیری نماید.

می‌شود. اگر انحنای گاوسی مانند کره، عددی مثبت باشد، محیط آن کمتر از $2\pi r$ می‌شود. و اگر مانند سهمیوار هذلولوی انحنای گاوسی مقداری منفی باشد، محیط عددی بزرگتر خواهد شد. در حالت کلی، برای انحنای گاوسی G ، محیط با کمک فرمول زیر قابل محاسبه است

$$2\pi r - G\pi \frac{r^3}{3} + \dots$$

برای یک رویه بسته، فرمول شگفت‌انگیز گاوس-بُنه که انحنای گاوسی G و مشخصه اویلر χ را به هم مرتبط می‌کند، وجود دارد. مشخصه اویلر یک مقدار کاملاً ترکیبیاتی است که با مثلث‌بندی دلخواه یک رویه و با جمع تعداد رأس‌ها و وجه‌های مثلث‌ها منهای تعداد یال‌هایشان به دست می‌آید. قضیه گاوس-بُنه می‌گوید

$$\int G = 2\pi r \chi.$$

از آنجایی که مشخصه اویلر کره ۲ است، از فرمول فوق نتیجه می‌شود انتگرال انحنای گاوسی آن برابر است 4π بررسی درستی این مطلب در یک کره واحد آسان است زیرا که انحنای گاوسی آن ۱ است و این بیانگر آن است که مساحت سطح کره برابر 4π می‌باشد. نکته جالب این است که این برای هر کره تغییر شکل یافته به هر اندازه و شکلی نیز همچنان درست باقی می‌ماند.

قضیه گاوس-بُنه یک تساوی جالب هندسی و ترکیبیاتی است. از این قضیه بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که مشخصه اویلر مستقل از مثلث‌بندی رویه است، چون انتگرال انحنای گاوسی، که کمیتی ذاتی رویه است، مستقل است. به طور مشابه می‌توان گفت انحنای گاوسی با تغییر شکل ثابت می‌ماند، چرا که مشخصه اویلر تغییر نمی‌کند.

همان‌طور که در مقاله درباره نیرنبرگ

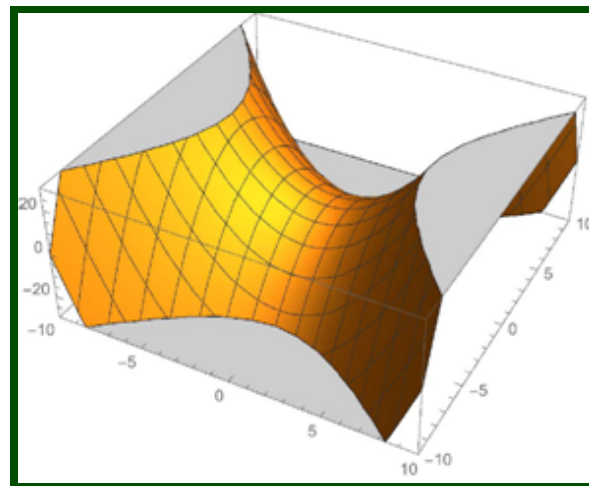
(Notices, Feb. 2016, Recent Applications of Nirenberg's Classical Ideas)

ملاحظه می‌شود، در ۱۹۷۰ نیرنبرگ این سؤال را پرسیده بود که چه توابعی بر روی کره، برای نشاندهی مختلّف کره در فضا، می‌توانند به عنوان تابع انحنای گاوسی باشند. با توجه به قضیه گاوس-بُنه، انتگرال آن باید 4π باشد. آیا شرایط دیگری نیز وجود دارد؟

* دانشگاه زنجان

** دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

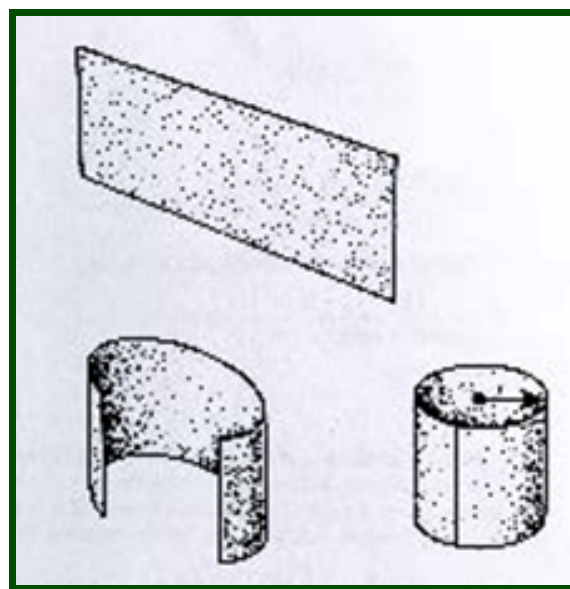
نخواهد کرد. اگر شما صفحه‌ای را همانند شکل ۳ لوله کنید تا به یک استوانه تبدیل شود، انحناهای اصلی آن از صفر و صفر، به صفر و ۱ تغییر می‌کند ولی انحنای گاوسی آن همچنان صفر باقی می‌ماند.



شکل ۲: در این سهمیوار هذلولوی انحنای گاوسی $(-1)(+1) = -1$ است.

راهی که از طریق آن، یک حشره بتواند انحنای گاوسی رویه‌ای را در نقطه p اندازه بگیرد این است که به دایره ژئودزیکی با شعاع بسیار کوچک r در پیرامون p :

$$C = \{x : \text{dist}(p, x) = r\}$$



شکل ۳: با لوله کردن صفحه و تبدیل آن به استوانه‌ای با شعاع r ، انحناهای اصلی از ۰ و ۰ به $r/1$ و ۰ تغییر می‌کند ولی انحنای گاوسی ۰ باقی می‌ماند.

توجه کند. اگر انحنای گاوسی صفر باشد، محیط برابر با $2\pi r$